

# Geinige getallenpuzzels en gruwelijke grafieken

## Ervaringen uit het project Wiskundig denken in het basisonderwijs

**Rekenen-wiskunde op de basisschool omvat meer dan het leren van feiten en procedures. Ook het ontwikkelen van wiskundig denken is belangrijk. Voor alle leerlingen!**

### Marc van Zanten

De auteur is ontwikkelaar en onderzoeker rekenen-wiskunde bij SLO en de Universiteit Utrecht.

**D**e leerstof voor rekenen-wiskunde in het basisonderwijs omvat uiteenlopende zaken en kent verschillende doelen. Dat varieert bijvoorbeeld van het paraat krijgen van basale kennis en vaardigheden tot het leren beheersen van formele wiskundetaal. Het gaat niet alleen om het verwerven van een verzameling rekenfeiten en -procedures, maar ook om het ontwikkelen van een wiskundige houding. Dat betekent dat leerlingen op een wiskundige wijze leren kijken naar de werkelijkheid. Dit omvat in de eerste plaats het kunnen toepassen van rekenen-wiskunde in (context)situaties. Maar er is méér. Het gaat ook om het wiskundig denken over de realiteit, inclusief de wiskunde zelf. Dit laatste perspectief is nog onderbelicht in reguliere leermiddelen. Reden voor SLO om – in samenwerking met anderen<sup>1</sup> – te verkennen hoe wiskundig denken op de basisschool kan worden bevorderd. In dit artikel geven we door-

kijkjes in de ervaringen die dit schooljaar zijn opgedaan<sup>2</sup> en wat we daarvan hebben geleerd. We beginnen met een schets van de onderliggende ideeën.

### *Wiskundig denken*

In de reken-wiskundeles wordt sowieso nagedacht, maar daarbij gaat het niet altijd om wiskundig denken. Als bijvoorbeeld de leerkracht een bepaalde rekenprocedure aanleert door deze te demonstreren aan de hand van een voorbeeld, dan is het denkwerk van de leerlingen gericht op het volgen van wat de leerkracht voordoet, om dit vervolgens correct na te kunnen doen. Anders gezegd: het denkproces van de leerlingen heeft dan het karakter van imiteren. Leerlingen denken daarbij zeker wel na, maar het gaat dan niet om wiskundig denken. Wiskundig denken is niet reproductief, maar productief en creatief van aard: de wiskundige denkhandelingen worden niet nagedaan maar zelf bedacht. Dit *zelf bedenken* zie

je ook in de definitie van de Nederlandse hoogleraar Paul Drijvers (2015): ‘Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.’ Hij onderscheidt drie kernaspecten van wiskundig denken: probleemoplossen, modelleren en abstraheren, waarvan hij aangeeft dat ze relatief zijn (Redactie VB, 2018). Wat voor de ene leerling abstract is, kan voor een ander betekenisvol zijn en wat een probleemopgave is voor de een, is voor een ander routinematig oplosbaar. Volgens Keith Devlin (2012), een Brits-Amerikaans wiskundige, gaat het bij wiskundig denken ook om logisch en analytisch denken en kwantitatief redeneren. Hij wijst erop dat wiskundig denken, zeker in de 21<sup>e</sup> eeuw, van belang is voor iedereen. Dat komt ook naar voren in het advies van het Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde (2019), waarin wiskundige denk- en werkwijzen als probleemoplossen en logisch redeneren een belangrijke plaats innemen.

### **Wiskundig denken in het basisonderwijs**

Bij het werken aan het project *wiskundig denken in het basisonderwijs* hebben we een paar keuzes gemaakt. In de eerste plaats hebben we twee invalshoeken gekozen: wiskundig probleemoplossen en kritisch wiskundig redeneren. Hiermee bestrijken we belangrijke aspecten van wiskundig denken: analytisch en creatief denken en kwantitatief redeneren. Verder richten we ons op mogelijkheden om productief en niet-routinematig denken te bevorderen bij alle leerlingen in de groepen 3 tot en met 8, ongeacht hun (veronderstelde) niveau.

### **Wiskundig probleemoplossen...**

Probleemoplossen wordt wel eens omschreven als *dat wat je doet als je niet weet wat je moet doen*. Bij wiskundig probleemoplossen gaat het om situaties of opgaven waarvoor een leerling geen aanpak paraat heeft. Leerlingen weten dan dus niet hoe ze te werk moeten gaan. Ze krijgen ook geen oplossingsweg aangeleerd (in dat geval zou er geen sprake meer zijn van probleemoplossen), maar moeten deze zelf zoeken en vinden.

Wiskundig probleemoplossen leer je niet vanzelf. Er treedt niet zomaar transfer op van het beheersen van rekenkennis en rekenprocedures naar het toepassen daarvan in probleemopgaven. Voor het leren van wiskundig probleemoplossen is het ook nodig dat er *ervaring* wordt opgedaan met probleemoplossen, inclusief het reflecteren op die ervaringen (zie bijvoorbeeld Schoenfeld, 1985). In die zin verschilt probleemoplossen niet van andere rekenwiskundige vaardigheden; er is beheersing nodig van de onderliggende voorkennis, maar ook oefening van de vaardigheid zelf.

We zijn op zoek gegaan naar probleemachtige opgaven die geschikt zijn voor alle leerlingen. Dat laatste betekent onder meer dat leerlingen

die minder zeker zijn bij rekenen-wiskunde niet door de opgave moeten worden afgeschrikt. Zulke opgaven voldoen aan de volgende kenmerken:

1. Het aantal gegevens in de opgave en de condities gesteld aan de oplossing zijn beperkt.
2. Het moet voor alle leerlingen mogelijk zijn om een beginpunt te vinden voor het oplossen, ook bijvoorbeeld met een *guess and check* aanpak.
3. Er zijn verschillende oplossingswegen om tot een goede oplossing te kunnen komen, zowel meer geavanceerde manieren als meer eenvoudige aanpakken.

### **... met geïnjage getallenpuzzels**

We verzamelden enkele getallenpuzzels die voldoen aan de genoemde kenmerken en die bovendien gemakkelijk kunnen worden aangepast voor verschillende groepen. Deze opgavetypen zijn in dit tijdschrift uitgebreid besproken in het artikel *Probleemoplossen voor alle leerlingen* (Van Zanten, 2019). Hier geven we enkel een korte typering van één van deze probleemachtige opgavetypen en ligt de nadruk op de opgedane ervaringen op scholen verspreid over het land.

Bij *welke hoort er niet bij* worden vier zaken vergeleken, waarbij van elk van die zaken kan worden beredeneerd dat het om een bepaalde reden niet bij de drie andere hoort. In ons geval gaat het steeds om vier getallen. Leerlingen worden met deze getallenpuzzel uitgedaagd tot redeneren over de eigenschappen en onderlinge relaties van de gegeven getallen.

Leerlingen van groep 3, 5 en 7 kregen verschillende gevallen van *welke hoort er niet bij* voorgelegd. In de groepen 5 en 7 mochten de leerlingen in kleine groepjes overleggen om tot hun antwoorden te komen die daarna klassikaal werden uitgewisseld. In groep 3 moesten we er rekening mee houden dat het voor leerlingen nog moeilijk kon zijn om hun gedachten onder woorden te brengen en dat ze die nog niet konden opschrijven. Daarom werkten de leerlingen hier niet in groepjes, maar omcirkelden zij steeds individueel een getal dat er volgens hen niet bij hoorde. Vervolgens werden ook hier de ideeën klassikaal besproken, waarbij de leerkracht kon helpen met het verwoorden en de redenering opschreef op het digibord.

In afbeelding 1 en 2 zijn voorbeelden te zien van redeneringen die leerlingen bij enkele opgaven naar voren brachten. Er is duidelijk te zien dat *welke hoort er niet bij* gelegenheid geeft tot redeneren op uiteenlopende niveaus. Zo werd het concept *even getallen* op verschillende manieren in de verschillende groepen gebruikt. In groep 7 gebruikten sommige leerlingen het letterlijk, maar het kwam ook voor in de vorm ‘alleen 16 kun je delen door 2’. En in groep 3 werd het op informeel niveau gebruikt in de

Leerlingen  
verwachten  
vaak niet dat  
informatie  
misleidend of  
onjuist kan  
zijn.



redenatie '9 zit niet in 0 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12.' Een duidelijk verschil tussen de groepen was dat in groep 3 en 5 leerlingen steeds voor één getal een reden bedachten waarom het niet bij de andere getallen hoort, terwijl in groep 7 veel leerlingen voor meerdere getallen een reden of meerdere redenen bedachten. Van het laatste staat een voorbeeld in afbeelding 3.

Van alle betrokken groepen gaven de leerkrachten aan dat alle leerlingen direct konden meedoen met *welke hoort er niet bij* en de andere getallenpuzzels. De opgaven vielen goed in de smaak, óók bij de leerlingen die zelf zeiden dat zij ze moeilijk vonden. In de hogere groepen waren leerlingen met name enthousiast over het zelf maken van varianten op de opgavetypen, die vervolgens werden uitgewisseld en voorgelegd aan elkaar. Deze eigen producties van puzzelopgaven leidden tot intensief

9	4
2	12

- 4 heeft alleen rechte lijntjes, schrijft als enige makkelijk
- 9 zit niet in 0 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12
- 12 is moeilijk om te schrijven; 12 of 21
- 12 heeft twee cijfers

21	55
4	2

- 21 is de enige in de 20
- 55 is heel hoog

▲ 1. Welke hoort er niet bij? Redeneringen van leerlingen uit groep 3

9	16
25	43

- 9 heeft geen tiental
- 9 is het kleinste getal
- Alleen 9 zit in de tafel van 3
- 16 is het enige even getal
- 16 zit in de tafel van 8
- alleen 16 kun je delen door 2
- 25 zit in de tafel van 5
- 25 kan je niet afronden op een tiental
- 25 zit een twintigtal in
- 25, als je die keer 4 doet heb je precies 100
- 43, want die hoort niet bij  $25 - 16 = 9$
- 43 is het grootste getal of het hoogste getal
- 43 is oneven (maar 40 is even)

▲ 2. Welke hoort er niet bij? Redeneringen van leerlingen uit groep 7

36	99
9	123

123 : is het hoogst  
 99 : er zitten 2 9 in  
 99 : 11 = 11 er de rest niet  
 9 : is de kleinste  
 36 : omdat er een 30 in zit  
 123 : omdat het boven de 100 zit  
 123 : zit niet in de tafel van 9  
 99 : 2 dezelfde getallen  
 99 : zit net één onder de 100

▲ 3. Welke hoort er niet bij? Werk van één leerling uit groep 7

overleg waarbij leerlingen hun best deden om duidelijk aan elkaar uit te leggen wanneer en waarom ze iets een goede oplossing vonden. In alle groepen, inclusief groep 3, was het voor leerlingen een verrassing dat een opgave meerdere goede oplossingen kan hebben. Dit, en het goed onder woorden brengen van de eigen redenering, werden door de leerkrachten het meest genoemd als leeropbrengst. Daarnaast werden specifieke zaken per opgavetype gemeld, zoals bij *welke hoort er niet bij* het zoeken naar verschillende kenmerken van hetzelfde getal en overeenkomende kenmerken van verschillende getallen.

**Reken-wiskundige factchecking...**

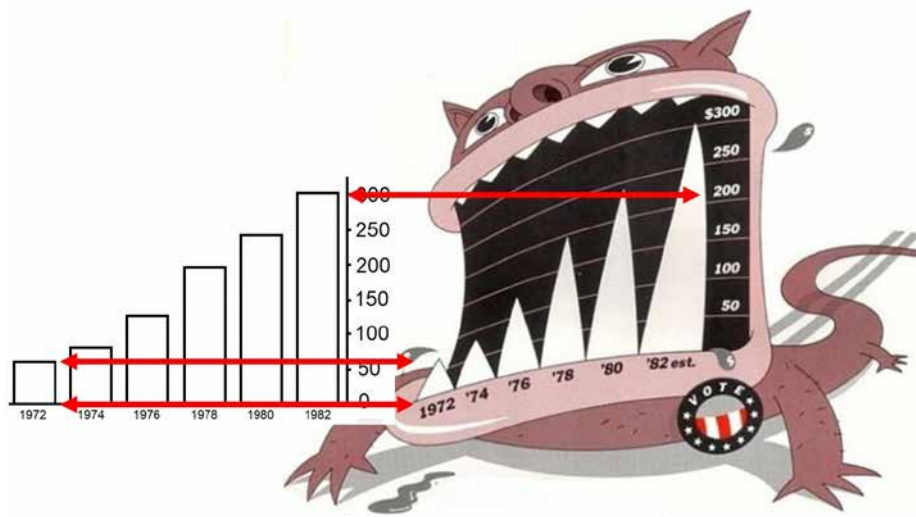
Bij kritisch denken gaat het, algemeen gezegd, om het kunnen interpreteren en op waarde schatten van informatie en het kunnen signaleren van onjuistheden. Veel informatie heeft een kwantitatieve, numerieke of anderszins wiskundige component. Denk aan gegevens uitgedrukt in getallen, maten en percentages of gepresenteerd in grafieken en diagrammen. Kritisch wiskundig denken betreft het omgaan met al dit soort informatie, die steeds vaker - bedoeld of onbedoeld - niet klopt of misleidend wordt weergegeven. Reken-wiskundige factchecking op de basisschool is erop gericht dit kritisch wiskundig denken te bevorderen. Een verkennend onderzoek hierover beschreven we eerder in dit tijdschrift in het artikel *Klopt dit wel?* (Van Zanten, Bruin-Muurling & Verschoor, 2018). Hierin lieten we zien dat leerlingen weliswaar verschillen in de mate waarin zij kwantitatieve informatie doorzien, maar dat er bij allerlei uiteenlopende situaties altijd wel leerlingen zijn die door misleidingen heen prikken.

**...bij gruwelijke grafieken**

In reken-wiskundemethodes is er veel aandacht voor het aflezen van informatie uit grafieken en diagrammen maar nauwelijks voor het gegeven dat deze grafische weergaven altijd *geselecteerde* informatie bieden waarmee een *bepaalde* boodschap voor het voetlicht wordt gebracht. Die boodschap kan feitelijk correct zijn, maar ook suggestief of onjuist. Naar aanleiding van ons verkennend onderzoek ontwikkelden we een aantal misleidende grafieken en diagrammen met daarbij vragen bedoeld om leerlingen de misleiding te laten doorzien. Deze zijn ook verwerkt in *De draad van Ariadne* in nummer 3 van dit tijdschrift dit jaar (Verschoor e.a., 2020). We laten wat zien van de eerste ervaringen hiermee met een groep 7 (van een andere school dan de groep 7 hierboven).

Naar aanleiding van onze eerdere ervaringen wilden we leerlingen enige handvatten en sturing geven. Alvorens de leerlingen zelf aan het werk te zetten, werd daarom klassikaal een authentiek (en oud) staafdiagram besproken over campagnekosten voor verkiezingen in de

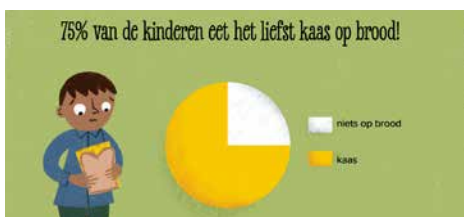
USA. De leerkracht wees de leerlingen op de vormgeving van het diagram als monster, de titel ervan – monsterlijke kosten – en de vervormde weergave van de staven van het diagram in de vorm van de tanden. Die vertekening werd getoond door het diagram te vergelijken met een ander met dezelfde getallen maar dan met een evenredig getekende schaal (afbeelding 4). Besproken werd onder meer wat de boodschap zou kunnen zijn geweest van de maker van het diagram; waarschijnlijk was het de bedoeling dat goed opviel dat de kosten flink waren gestegen in de loop der jaren en mogelijk was de boodschap dat dit heel erg was.



▲ 4. Bron: Citizens' Research Foundation, USA. Illustrator: Nigel Holmes

Hierna gingen de leerlingen in groepjes aan de slag met een grafiek of diagram met daarbij een vraag en soms ook een tip. Voorbeelden staan in afbeelding 5 en 6. De leerlingen moesten de vraag beargumenteerd beantwoorden en daarover een presentatie geven aan de hele groep. Daarbij konden ze vertellen wat ze hadden gevonden, maar ze mochten ook vragen stellen

▼ 5 en 6. Illustrator: Nina Lathouwers

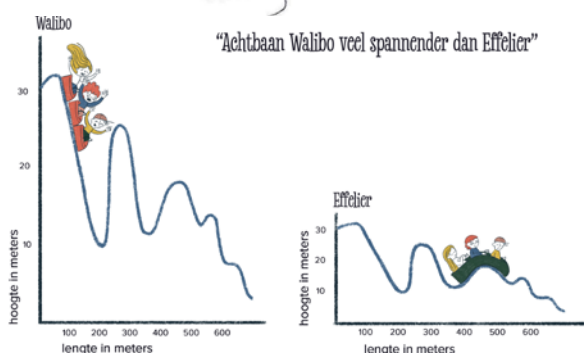
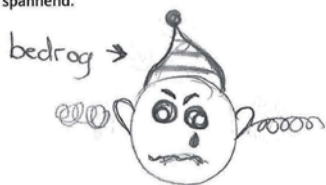


Wat klopt er niet? Leg uit waarom jullie dat vinden.  
Tip: Welke vraag is gesteld aan de kinderen die meededen aan dit onderzoek, denken jullie?

Eten jullie liever niets op je brood of kaas op je brood?  
Er staat: 75% van de kinderen eet het liefst kaas op hun brood, maar de vraag was Eten jullie liever niets of kaas op je brood

- Wat is waar?
- De achtbaan van Walibo is spannender want hij stijgt en daalt meer dan die van de Eiffel.
  - De achtbaan van de Eiffel is spannender want die heeft grotere hoogtevverschillen dan die van Walibo.
  - De achtbanen zijn allebei ongeveer even spannend.
  - Anders, want ...
- Leg uit waarom jullie dat vinden.

omdat ze allebei 30 meter hoog en 600 lang



aan de klas. Verschillende groepjes kozen voor het laatste, waarbij ze handig gebruik maakten van de vragen die ze zelf hadden gekregen. Een van de zaken die in deze les opviel was dat – ondanks het expliciete voorbeeld in de inleiding van de vertekende schaal bij de ‘monsterlijke’ grafiek – verschillende leerlingen bij de grafieken in afbeelding 6 in eerste instantie niet opmerkten dat dezelfde schaal op verschillende groottes was getekend. In de discussie met hun groepjes kwamen ze er later alsnog achter, wat bij sommige leerlingen tot de verontwaardigde constatering leidde dat het hier ging om bedrog! De leerkracht vertelde dat de leerlingen er in deze les weliswaar achter kwamen dat grafieken je op het verkeerde been kunnen zetten, maar ook dat het hier enkel nog om een eerste bewustwording ging.

#### Tot besluit

We leren veel van de ervaringen die we opdoen op verschillende scholen. Een belangrijk inzicht dat bij de probleemopgaven naar voren kwam is dat zoveel leerlingen – zelfs al in groep 3 – verrast waren dat een opgave meerdere correcte oplossingen kan hebben. Dit kan duiden op wat in internationale literatuur een *beliefwort* genoemd; een bepaalde overtuiging (in dit geval dat elke reken-wiskundeopgave slechts één goede oplossing heeft) die belemmerend kan werken als het gaat om het ontwikkelen van wiskundig denken. Bij de reken-wiskundige factchecking viel op – zoals ook al eerder in dit project – dat leerlingen vaak totaal niet verwachten dat geboden informatie soms misleidend of onjuist kan zijn. Voor de ontwikkeling van handreikingen en voorbeeldmaterialen voor wiskundig denken in het basisonderwijs willen we graag nog meer ervaringen opdoen. Mocht u volgend schooljaar ook conceptactiviteiten willen uitproberen dan horen wij dat graag<sup>3</sup>. U zult in ieder geval in toekomstige edities van Volgens Bartjens nog meer over dit project kunnen lezen!

#### Noten

- <sup>1</sup> Rekenwiskundige factchecking wordt uitgevoerd samen met Marika Verschoor (op persoonlijke titel) en Geeko Bruin-Muurling (Educatieve Dienstverlening Bruin-Muurling).
- <sup>2</sup> Alle deelnemende scholen, leerkrachten en leerlingen zijn in dit artikel geanonimiseerd.
- <sup>3</sup> U kunt in dat geval een mail sturen aan [m.vanzanten@slo.nl](mailto:m.vanzanten@slo.nl)

#### Literatuur

- Devlin, K. (2012). *Introduction to mathematical thinking*. Petaluma: CA, USA: Author.
- Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT (Oratie)*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. (2019). *Leergebied Rekenen & Wiskunde*. <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/>
- Redactie VB. (2018). *Probleemoplossen, modelleren en abstraheren*. Interview met Paul Drijvers. *Volgens Bartjens*, 38(2), 22-25.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York / London: Academic Press, Inc.
- Van Zanten, M. (2019). *Probleemoplossen voor alle leerlingen*. Stimuleren van wiskundig redeneren. *Volgens Bartjens*, 38(5), 5-8.
- Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G., & Verschoor, M. (2018). *Klopt dit wel? Reken-wiskundige factchecking in het basisonderwijs*. *Volgens Bartjens*, 37(5), 22-26.
- Verschoor, M., e.a. (2020). *De draad van Ariadne*. *Volgens Bartjens*, 39(3), 18-21.

